

## Rimas Norvaiša

### *Matematikos ir informatikos institutas*

#### Kas yra matematika?

Klausimą „kas yra matematika?“ formuluojame kaip kvietimą rimtai atsižvelgti į reiškinį vadinamą matematika. Vietoje žodžio „reiškinys“ galima būtų vartoti ir labiau įprastus apibūdinimus, pavyzdžiui, mokslas ar žinių sistema. Bet tai reikštų *a priori* priskirti matematikai gal būt visai nebūdingus bruožus<sup>(1)</sup>. Be to, daugumoje mokslo filosofijai skirtų veikalų matematikai nelieka vietos arba apie ją užsimenama tik epizodiškai. Lietuvos mokslo administratorių ir mokslo politikų požiūriu matematika yra fizinių mokslų dalis. Tiesa, pasaulyje nėra vieningos mokslų klasifikavimo sistemos ir kiekvienoje šalyje tokia sistema atspindi vietines tradicijas. Šiuo požiūriu Lietuvoje gyvename laikydamiesi viduramžių tradicijų. Kita vertus, paradoksalu yra tai, kad matematikos taikymas yra tiek plačiai paplitęs moksle, kiek mažai apie ją žino jos taikytojai.

Požiūris į tai, kas yra matematika nuolatos kito. Praeito šimtmečio pradžioje matematika vis dar buvo apibrėžiama išvardinant jos tyrimo objektus: skaičiai, forma, judėjimas, kitimas, erdvė ir panašiai. Vėliau apibrėžiant matematiką, buvo atsižvelgiama į jos tyrimo metodo ypatumus. Atrodo, kad paskutiniaisiais dešimtmečiais labiausiai pripažintu tapo matematikos, kaip mokslo apie tvarką<sup>(2)</sup> (angl. the science of patterns) apibūdinimas. Šiuo atveju sąvoka „tvarka“ suprantama bendriausia prasme, kaip bet kuris protu suvokiamas reguliarumas. Pasaulio suvokimas yra galimas tiek, kiek jame galima išvelgti kažkokią tvarką. Matematinis tvarkos supratimas yra bendras ir ta prasme, kad jos nedomina tiriamą struktūrą sudarantys objektai. Svarbūs yra tik ryšiai tarp objektų ir tų ryšių reguliarumas. Kiekviena matematikos sritis nagrinėja kurios nors struktūros ryšius tvarkos požiūriu: tvarka tarp skaičių, tvarka tarp formų, judėjimo tvarka, elgesio tvarka ir t.t. Taip matematiką apibūdina Devlin'as savo knygoje „The Science of Patterns“([1]). Panašus į šį yra matematikos kaip mokslo apie struktūras apibūdinimas.

Minėti ir kiti panašūs matematikos apibūdinimai vargiai suprantamai atskleidžia jos pagrindinius bruožus, o tuo labiau jos išskirtinumą lyginant su kitais mokslais. Tokiuose apibūdinimuose viena abstrakti sąvoka aiškinama kita, dar mažiau aiškia, sąvoka (pvz. anksčiau minėtoji tvarka ar struktūra). Tačiau abstrakcijų išvengti neįmanoma, nes matematikos tyrimo objektas yra dalis abstrakčių sąvokų, vadinamų matematikos objektais. Dar 1884 m. Frege ([2]) įtikinamai parodė, kad skaičius yra kažkas, kas yra susiję su sąvoka; jis teigė, kad skaičius yra tam tikros sąvokos ekstensija. Vėliau sąvokos ekstensiją pakeitė aksiomų pagalba apibrėžiama aibė – matematikos objektų konstravimo priemonė. Kaip ir visos abstrakcijos, matematikos objektai nepriklauso nuo erdvės ir laiko, nesiejami priežastiniais ryšiais ir panašiai. Deja, nėra tikslesnio matematikos objekto apibūdinimo, kaip pati matematikos teorija, kurioje tas objektas įgyja prasmę.

Tai, kad matematikos tyrimo objektas yra abstrakčios sąvokos, matematiką išskiria iš gamtos, žmogaus ir visuomenės mokslų tarpo. Matematika skiriasi ne tik tyrimo objektais; ji išsiskiria tyrimo metodais, bei tyrimų rezultatų vertinimo kriterijais. Geriausiai žinomas skirtumas – eksperimento ir dedukcinio samprotavimo vaidmenys. Gamtos mokslų indukcija nėra tas pats, kas matematinė indukcija – pagrindinis teiginių apie begalines aibes įrodymo metodas. Estetika ir grožis, kaip matematikos rezultatų vertinimo kriterijai, matyt sunkiai suprantami tiems, kam neteko rinktis tarp galimų matematinės problemos sprendimo variantų<sup>(3)</sup>. Bet tai ir yra grynosios matematikos esmė ir kasdienybė. Ne rezultato „praktinis naudingumas“, bet jo elegantiškumas ir įrodymo paprastumas lemia jo vietą matematikos žinių sistemoje. Tokių matematikų požiūrį patvirtina matematikų asmeninės patirties istorinė analizė. Pavyzdžiui, Poincare ([3], 52 pusl.) rašo, kad matematikai vadovaujasi „estetiniu jausmu, pažįstamu visiems tikriems matematikams, ... kadangi naudinga yra ta kombinacija, kuri yra gražiausia.“

Nežinant minėtų aplinkybių, ar jas ignoruojant, mažai suprantama būtų ir matematikos filosofijos problema: kaip paaiškinti matematikos efektyvumą kituose moksluose? Jei matematikos objektai yra abstrakcijos, o gamtos mokslų tyrimo objektai yra realūs reiškiniai, tai kaip galime paaiškinti matematikos naudingumą tiriant fizinių pasaulį? Kokiu būdu tai, kas atsiranda matematiko galvoje pasirodo tinka tam, kas yra toli nuo bet kokios jo patirties? Ši matematikos paradoksalumą aiškiai formulavo Wigner‘is savo garsiajame esė „Nepaaiškinamas matematikos efektyvumas gamtos moksluose“ ([4]).

Matematikos taikomumo gamtos moksluose problemą Steiner‘is ([5]) aiškina jau pripažindamas ir atsižvelgdamas į tai, kad šiandienos matematikai naudoja grožio ir patogumo (beauty and convenience) kriterijus. Šią aplinkybę jis vadina antropocentrizmu ir teigia, kad ji yra šiuolaikinės fundamentaliosios fizikos atradimų būtina sąlyga. Tokiu būdu, matematikos dėka mokslinės teorijos apie gamtą tampa „patogios vartojimui“ („user friendly“).

Paprasčiausias matematikos taikomumo gamtos moksluose paradokso aiškinimas remiasi prielaida, jog matematikos objektai egzistuoja nepriklausomai nuo žmogaus mąstymo. Kadangi matematikos objektai aiškiai nėra fiziniai, jų objektyvaus egzistavimo prielaida reiškia pripažinimą egzistuojant tokios realybės, kuri skiriasi nuo fizinės ir psichinės. Matematikos filosofijoje ši pozicija vadinama platonizmu arba realizmu. Remiantis platonizmo prielaida nėra problemų aiškinant matematikos efektyvumą gamtos moksluose. Bet sunkumai atsiranda tada, kai bandoma atsakyti į klausimą, o kokiu būdu žmogaus protas sugeba pasiekti tą matematinių objektų pasaulį. Nuoroda į matematinę intuiciją nelabai padeda, nes ji pati yra ne mažiau paslaptingas reiškinys. Nesugebėjimas racionaliai paaiškinti platonizmo poziciją verčia matematikus jos atsisakyti tais atvejais, kai ją reikalaujama paaiškinti.

Anti-platonizmo pozicija nėra taip vienareikšmiškai išreikšta ir ją sudaro daugybė skirtingų ir įvairiai grindžiamų požiūrių, pradedant formalizmu ir baigiant nominalizmu matematikos filosofijos kontekste. Pastaruoju metu pasirodė kelios dešimtys knygų skirtų platonizmo ir anti-platonizmo problemai (pavyzdžiui [6]). Pagrindinė šios diskusijos išvada

viena: kol kas nėra argumentų, kurie neabejotinai pagrįstų platonizmą, arba neabejotinai jį paneigtų.

Mokslinėje literatūroje galima rasti ir kitokio pobūdžio reakcijų į platonizmo hipotezę. Pavyzdžiui, Lakoff'o ir Nunez'o knygoje „Iš kur atsiranda matematika“ apie platonizmo, autorių vadinamo „matematikos romantika“, pasekmes taip rašoma ([7], 341 pusl.): „Matematikos romantika nėra ta istorija, kuri turi tik teigiamas pasekmes. Ji gąsdina žmones.“ „Matematikos romantika tarnauja matematikų bendruomenei. Ji padeda palaikyti ir pateisinti elitizmą.“ „Matematikos romantika nėra nekaltas mitas – bent jau netiesiogiai jis prisideda prie visuomenės socialinio ir ekonominio padalinimo.“

Platonizmo ir anti-platonizmo dilemos aktualumas paskutiniaisiais dešimtmečiais matematikos filosofijoje rodo, jog filosofija lyg ir perleidžia matematikų kompetencijai vieną iš pagrindinių savo sričių – ontologiją. Visiškai atvirai tai tvirtina ir bando pagrįsti prancūzų filosofas A. Badiou ([8]). Jis tiesiog teigia, kad matematika yra ontologija.

Klausimą „kas yra matematika?“ trumpai apžvelgėme tik filosofinių svarstymų kontekste. Tačiau šis klausimas skirtingai interpretuojamas ir tuo labiau skirtingai atsakomas ir kituose kontekstuose. Tokiais kontekstais yra metamatematika, istorinė idėjų analizė, kognityviniai mokslai, psichologija ir kita. Daugelis matematikos prigimties aspektų aptariama neseniai pasirodžiusiame rinkinyje [9]. Požiūrių įvairovė šiuo klausimu primena senas diskusijas apie tai „kas yra žmogus?“, „kas yra protas?“, ar „kas yra kalba?“. Šie ir kiti panašūs klausimai iš filosofijos kompetencijos perėjo į naujų mokslo krypčių sprendžiamų problemų kompetenciją. Cituojant minėto rinkinio [9] redaktorių R. Hersh'ą, galima viltis, kad klausimas „kas yra matematika?“ neilgai trukus taps kurios nors naujos mokslo srities problema.

## Pastabos

<sup>(1)</sup>Anglų kalboje žodis „science“ paprastai siejamas su gamtos mokslais. Rusų kalboje žodis „nauka“ siejamas ir su literatūra, ir su suvirinimu, ir su mezgimu ir pan. Tuo tarpu mūsų kalboje, kartu su įprastinėmis „mokslas“ reikšmėmis, Lietuvių kalbos žodynas nurodo taip pat reikšmes: svarbieji religijos teiginiai, pamokslas ir panašiai.

<sup>(2)</sup>Anglų kalbos žodį „pattern“ verčiau „tvarka“. Tokio vertimo nemačiau nei viename anglų-lietuvių kalbos žodyne. Mano pasirinkimą nulėmė konteksto žodžiui suteikiama reikšmė. Tokia žodžio „pattern“ reikšmė taip apibrėžiama The Oxford English Dictionary vol. XI (2nd ed., Clarendon Press, 1989, p. 357 8c figuratively): an arrangement or order of things or activity in abstract senses; order or form discernible in things, actions, ideas, situations, etc. Panašiai apibūdinamą „pattern“ reikšmę galima rasti ir kituose anglų kalbos žodynuose. Beveik tokią pačią reikšmę, greta kitų reikšmių, turi ir žodis „tvarka“: išdėstymo, išsidėstymo būdas, sistema (Lietuvių kalbos žodynas: tvarka<sup>(1)</sup> 3).

<sup>(3)</sup>Kokia prasme matematika yra menas labai taikliai parodo P. Lockhart'as savo straipsnyje „A Mathematician's Lament“, skirtame matematikos mokymo vidurinėje mokykloje problemoms (žr. svetainės <http://www.matematika.lt> skyrelį straipsniai).

#### Literatūra

- [1]. K. Devlin, Mathematics: The Science of Patterns. The Search for Order in Life, Mind, and the Universe. Scientific American Library, 1994.
- [2]. G. Frege, The Foundations of Arithmetics. A logico-mathematical enquiry into the concept of number. Engl. Translation by J.L.Austin. Northwestern University Press, 1980.
- [3]. H. Poincare. Science et Methodie. Flammarion, Paris, 1908.
- [4]. E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Comm. In Pure Appl. Math., 1960.
- [5] M. Steiner, The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.
- [6]. M. Balaguer, Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press, 1998.
- [7]. G. Lakoff and R.E. Nunez, Where Mathematics Comes From. How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. Basic Books, 2000.
- [8]. A. Badiou. Being And Event. Continuum, 2005.
- [9]. R. Hersh (editor). 18 unconventional essays on the nature of mathematics. Springer, 2006.